


JF Malisani

MMC

Livre : Loi Rubin Krenkel

"Introduction to Continuum
Mechanics"

Chap I / Bases mathématiques

①

1) Notation indiciale

1.1) Convention de sommation. Indices muets

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

autre écriture : $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

"i" est un indice muet

on peut le changer

$$S = \sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

Def: indice muet $\equiv$ indice qui est répété 2 fois
(en anglais : dummy index) ②

écriture encore plus simple de S avec convention d'Einstein de sommation

$$S = a_i x_i = a_k x_k = a_j x_j$$

↑ ↗
quand l'indice est répété, cela indique une sommation

~~$$S = a_i b_i x_i$$~~

pas de sens

(3)

(i est répétée 3 fois)

Nous serions alors écrire $S = \sum_{i=1}^n a_i b_i x_i$

Exemples : posons $n = 3$ (3 dimensions)

$$i) \quad a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

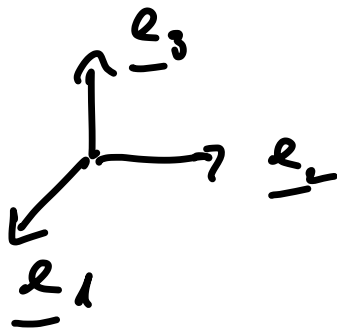
$$ii) \quad a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{nn}$$

$$iii) \quad a_i \underline{e}_i = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$$

Note: on représente les vecteurs avec
une barre en dessous

(4)

Espace vectoriel



$\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ base

orthonormée de notre espace

- $\| \underline{e}_1 \| = \| \underline{e}_2 \| = \| \underline{e}_3 \| = 1$ 3D

$\| \cdot \| \equiv$ norme

- Ils sont orthogonaux (longueurs) $\underline{e}_1 \perp \underline{e}_2$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad a_{ij} x_i x_j &= a_{1j} x_1 x_j + a_{2j} x_2 x_j + a_{3j} x_3 x_j \\
 &= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 \\
 &\quad + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 \\
 &\quad + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

v) Q) Combien de termes dans
 $a_{ijk} x_i x_j x_k$

1.2/ Indices libres

⑥

$$x_i' = a_{im} x_m \quad i = 1, 2, 3$$

m est un indice regretté

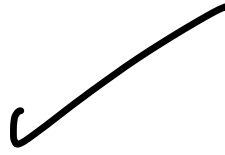
i est un indice libre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = a_{1m} x_m \\ x_2' = a_{2m} x_m \\ x_3' = a_{3m} x_m \end{cases} \rightarrow \text{Système d'équations}$$

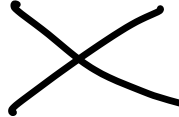
Def : indice libre $\equiv$ indice qui apparaît seulement une fois dans chaque terme d'une équ.

Exercice : sélectionner les expressions ⑦
qui ont un sens

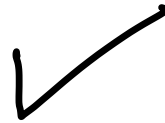
$$\underline{e}_i = Q_{m,i} \underline{e}_m$$



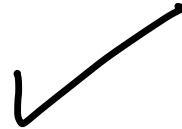
$$a_i = b_j$$



$$a_i + k_i - c_i = 0$$



$$a_i + b_j c_j d_j = 0$$



$$T_{ij} = A_{im} A_{jm}$$

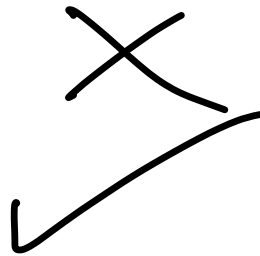


$$T_{ij} = T_{ik}$$

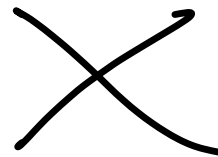
$$A_{ij} B_{ji} = \beta$$

$$A_{il} = C_{ijkl}$$

$$A_{ii} v_j = u_i$$



$$B_{jl}$$



8

1.3) Kronecker Delta

⑨

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

$$\begin{aligned} I &\equiv \text{Matrix identity} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] \end{aligned}$$

$$\underline{E}_k : \delta_{ii} = 3 = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} \quad (10)$$

$$\delta_{im} a_m = a_i \quad (\text{contraction})$$

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mn} \delta_{nj} = \delta_{ij}$$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$$

product scalar

1.4) Symbols de permutation

11

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \equiv \text{selon que } i, j, k \begin{cases} \text{forment une permutation} \\ \text{paire de } 1, 2, 3 \\ \text{impaire de } 1, 2, 3 \\ \text{si pas} \\ \text{une permutation} \end{cases}$$

$$\epsilon_{111} = 0 = \epsilon_{112}$$

$$\epsilon_{123} = +1 = \epsilon_{231} = \epsilon_{312}$$

$$\epsilon_{321} = -1 = \epsilon_{132} = \epsilon_{213}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \epsilon_{jki} \\ &= -\epsilon_{kji} \end{aligned}$$

1.5/ Produit vectoriel

⑫

Symbole: $\times$

Le produit vectoriel de 2 vecteurs est un vecteur

Ex: $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$

$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_1 = -\underline{e}_3$$

$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$$

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_1 = \underline{0}$$

En général, soit $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$

$$\underline{b} = b_i \underline{e}_i$$

$$\underline{a} \times \underline{b} =$$

↘

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_i, \underline{e}_i) \times (b_j, \underline{e}_j) \\ = a_i b_j (\underline{e}_i \times \underline{e}_j)$$

(13)

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} = a_i b_j \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \underline{e}_k}$$

1.6) Manipulations avec les indices

a) Substitution

Soit $a_i = U_{im} b_m$ (#)

$b_i = V_{im} c_m$ (*)

étape 1, on réécrit (*) en utilisant $\textcircled{14}$
 m comme indice libre

$$b_m = T_{m \times k} C_k$$

étape 2, on insère dans (#)

$$a_i = U_{i \times m} T_{m \times k} C_k$$

b) Multiplication

Soit $p = a_m b_m$

$$q = c_m d_m$$

$$\text{Also } p q = a_m \delta_m c_k d_k$$

(15)

$$\text{Example: with } \underline{a} = a_i \underline{e}_i$$

$$\underline{b} = b_j \underline{e}_j$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = [a_i \underline{e}_i] \cdot [b_j \underline{e}_j]$$

$$= a_i b_j (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)$$

$$= a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= 2 + 0 + 12 = 14$$

c) Factorisation

(16)

$$\sigma_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

d) Contraction (Trace)

σ_{ii} est la contraction de σ_{ij}

$$\text{Ex: dot } \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{Then } \sigma_{ii} &= \lambda \theta \delta_{ii} + 2\mu \varepsilon_{ii} \\ &= 3\lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{ii} \end{aligned}$$

2) Tenseurs (algèbre tensorielle) (18)

2.1 Définition

Un tenseur (du 2^{ième} ordre) est une transformation linéaire qui transforme un vecteur dans un autre vecteur.

Mathématiquement :

$$T : \underbrace{V \longrightarrow V}_{\text{espace vectoriel}}$$
$$T \underline{a} = \underline{b}$$

(29)

Linéaire veut dire que :

$$i) T(\underline{a} + \underline{b}) = T\underline{a} + T\underline{b}$$

$$ii) \text{ et } T(\lambda \underline{a}) = \lambda T\underline{a}$$

$$i) \text{ et } ii) \iff T(\lambda \underline{a} + \beta \underline{b}) \\ = \lambda T\underline{a} + \beta T\underline{b}$$

$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Note: $T_{\underline{a}} = S_{\underline{a}} \quad \forall \underline{a} \in V$ (25)

$$\iff T = S$$

Examples:

i) Soit $T_{\underline{a}} = 3_{\underline{a}}$

T est-il en Kerneum?

ii) Soit $T_{\underline{a}} = n$ n fixe

T est-il en Kerneum?